ÜBER EINIGE SCHLITZTHEOREME DER KONFORMEN ABBILDUNG

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
GENEHMIGT VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

EWALD RENGEL
AUS BERLIN

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 1. DEZEMBER 1932
TAG DER PROMOTION: 31. MAI 1933

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. L. BIEBERBACH
PROFESSOR DR. E. SCHMIDT

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin" / Band I

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit soll die Methode der maximalen Flächenstreifen, die GRÖTZSCH in mehreren Arbeiten[1]) entwickelt hat, durch Heranziehung des SCHWARZschen Lemmas einfacher gestaltet und wesentlich verschärft werden. Hierdurch gelingt es insbesondere, den endgültigen Beweis für die folgende SZEGÖsche Vermutung[2]) zu erbringen.

$w = f(z)$ bilde den Einheitskreis schlicht normiert so ab, daß ∞ nicht Bildpunkt ist. Durch $w = 0$ werden n gleichwinklig verteilte Halbstrahlen gezogen und auf jedem der 0 nächstbenachbarte Randpunkt gewählt. Für die Maximalentfernung d dieser n Punkte von 0 gilt $d \geqq \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$, wobei das Gleichheitszeichen nur bei den Schlitzabbildungen $\frac{e^{i\alpha} z}{\sqrt[n]{(1 + e^{i\beta} z^n)^2}}$ steht.

Für $n = 2$ ist diese Vermutung, die eine Verallgemeinerung des KOEBEschen Viertelsatzes darstellt, von SZEGÖ[3]) selbst bewiesen worden. Ferner hat GRÖTZSCH[4]) für beliebiges n den Spezialfall, daß die n der 0 nächstbenachbarten Randpunkte ein regelmäßiges n-Eck mit 0 als Mittelpunkt bilden, erledigt und gleichzeitig auf schlichte normierte Abbildungen des längs endlich vielen konzentrischen Kreisbögen geschlitzten Einheitskreises ausgedehnt. Mein Beweis liefert die folgende Verallgemeinerung der SZEGÖschen Vermutung:

$w = f(z)$ bilde den längs endlich vielen konzentrischen Kreisbögen geschlitzten Einheitskreis schlicht normiert ab. Der Peripherie $|z| = 1$ möge das Randstück $\mathfrak{S}$ entsprechen (∞ kann Bildpunkt sein). Durch $w = 0$ nehmen wir n gleichwinklig verteilte Halbstrahlen, die alle $\mathfrak{S}$ treffen mögen. Für die Maximalentfernung d der 0 nächstbenachbarten Punkte von $\mathfrak{S}$ auf diesen Halbstrahlen gelte $d \leqq c$ (c reell, $\sqrt[n]{\frac{1}{4}} \leqq c \leqq \infty$). Nehmen wir nun die n gleichwinklig verteilten Halbstrahlen durch

---

1) H. Grötzsch, *a) Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung.* I, II. Berichte Akad. Leipzig 80 (1928), 367—376; 497—502.

b) Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche. I, II. Berichte Akad. Leipzig 81 (1929), 38—47, 217—221.

2) G. Szegö, Jahresbericht D. M. V. 31 (1922), *42, Aufgabe* 2.

3) G. Szegö, Jahresbericht D. M. V. 32 (1923), *45.*

4) A. a. O. 1) a) I.

$w = 0$, die die Winkel zwischen den ersteren halbieren, so trifft entweder mindestens einer dieser Halbstrahlen $\mathfrak{S}$ nicht, oder für die Maximalentfernung d_1 der 0 nächstbenachbarten Punkte von $\mathfrak{S}$ auf diesen Halbstrahlen gilt $d_1 \geqq \sqrt[n]{\frac{c^n}{4c^n - 1}}$. Das Gleichheitszeichen steht nur bei $f(z) = e^{i\alpha}\, {}_cE^n(e^{i\beta} z)$, wobei ${}_cE^n(z) = \frac{z}{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{c^n} - 2\right) z^n + z^{2n}}}$ gesetzt ist.

Man erkennt unmittelbar, daß der Spezialfall dieses Satzes mit $c = \infty$ die Vermutung von SZEGÖ enthält. Aus dem Satz folgen ferner durch einfache Transformationen Verallgemeinerungen bekannter Sätze von BIEBERBACH[5]), GRÖTZSCH[6]), PÓLYA[7]). Durch Hinzunahme der Bedingung $|f(z)| < R$ $(R > 1)$ ergeben sich Verschärfungen, die an Sätze von PICK[8]) anknüpfen.

§ 1. Hilfssätze.

Hilfssatz I: *In der ζ-Ebene liege ein Rechteck $\mathfrak{R}$ mit den Seiten s_1, s_2 der Länge a, den Seiten σ_1, σ_2 der Länge b. $\mathfrak{R}$ werde durch die im abgeschlossenen Rechteck reguläre eindeutige Funktion $\zeta_1 = f(\zeta)$ konform abgebildet. Das Bild einer Parallelen p zu σ_1 habe die Endpunkte P und Q. Dann soll die Projektion der Strecke PQ auf die feste Gerade g eine Länge $l \geqq \beta$ haben für alle Parallelen p zu σ_1. $f(\zeta)$ braucht nicht schlicht zu sein. Setzen wir $\zeta = \xi + i\eta$ und $J = \iint_{\mathfrak{R}} |f'|^2 \, d\xi \, d\eta$, so gilt*

$$\frac{a}{b} \leqq \frac{J}{\beta^2}, \tag{1}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann stehen kann, wenn $f(\zeta)$ eine Ähnlichkeitstransformation ist.

Beweis: Wir können annehmen, daß s_1, s_2 der imaginären η-Achse parallel sind, daß 0 eine Ecke von $\mathfrak{R}$ ist und $\mathfrak{R}$ im Quadranten $\xi > 0$, $\eta > 0$ liegt. Es ist

$$J = \iint_{\mathfrak{R}} |f'|^2 \, d\xi \, d\eta = \int_0^a \left\{ \int_0^b |f'|^2 \, d\xi \right\} d\eta.$$

5) L. Bieberbach: *a) Über einige Extremalprobleme im Gebiet der konformen Abbildung.* Math. Ann. 77 (1916), 153—172.

b) Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen. Berichte Preuß. Akad. 1929, 620—623.

6) A. a. O. 1) b).

7) G. Pólya, *Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Bereiche.* Berichte Preuß. Akad. 1929, 55—62.

8) G. Pick: *Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet.* Berichte Akad. Wien 126 (1917), 247—263.

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\int_0^b 1^2 d\xi \cdot \int_0^b |f'|^2 d\xi \geqq \left(\int_0^b |f'| d\xi\right)^2,$$

also $\int_0^b |f'|^2 d\xi \geqq \frac{1}{b}\left(\int_0^b |f'| d\xi\right)^2$. Es ist $\int_0^b |f'| d\xi$ die Länge l des Bildes einer Parallelen p zu σ_1. Da $l \geqq \beta$ ist, so gilt

$$J \geqq \int_0^a \frac{1}{b}\beta^2 d\eta = \frac{a}{b}\beta^2 \text{ und damit (1).}$$

Für ein η sei $\int_0^b |f'| d\xi > \beta + c$ (c reell, > 0), dann gilt wegen der Stetigkeit des Integrals nach η für ein ganzes η-Intervall der Länge a': $\int_0^b |f'| d\xi > \beta + c$. Das obige Beweisverfahren liefert dann

$$J > \frac{a-a'}{b}\beta^2 + \frac{a'}{b}(\beta + c)^2 > \frac{a}{b}\beta^2 + \frac{2a'\beta c}{b},$$

$$\frac{a}{b} < \frac{J}{\beta^2} - \frac{2a'c}{b\beta}. \tag{2}$$

Soll $\frac{a}{b} = \frac{J}{\beta^2}$ gelten, so muß $\int_0^b |f'| d\xi = \beta$ für alle η erfüllt sein, d. h. jede Parallele p zu σ_1 muß in eine Parallele zu g übergehen. Den Parallelen zu s_1 entsprechen als orthogonalen Trajektorien der Parallelen zu σ_1 Strecken der konstanten Länge α senkrecht zu g. In dem Fall ist das Bild von $\mathfrak{R}$ ein ähnliches Rechteck $\mathfrak{R}'$, denn es ist $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$.

Wir wollen nicht aus anderer Quelle entleihen, daß $f(\zeta)$ in dem Fall eine Ähnlichkeitstransformation sein muß. Wir beweisen folgendes: Die Rechtecke $\mathfrak{R}(s_1, s_2; \sigma_1, \sigma_2)$ und $\mathfrak{R}'(s_1', s_2'; \sigma_1', \sigma_2')$ mit den Seitenlängen a, b bzw. α, β seien eineindeutig konform eckpunkttreu aufeinander abgebildet. Dann gilt $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$, und die Abbildung ist eine Ähnlichkeitstransformation.

Nach dem bewiesenen Teil des Hilfssatzes I, auf beide Rechtecke angewandt, ist $\frac{a}{b} \leqq \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta^2}$, $\frac{\alpha}{\beta} \leqq \frac{a \cdot b}{b^2}$, also $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$. Dann geht jede Parallele zu σ_1 in eine Parallele zu σ_1' über, so daß die abgeschnittenen Rechtecke in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ ähnlich sind. Die Seite s_1 geht ähnlich

in s_1' über, folglich ist die Abbildungsfunktion überall gleich der Ähnlichkeitstransformation. Damit ist Hilfssatz I bewiesen.

Hilfssatz II: *Es sollen dieselben Voraussetzungen wie bei* I *gelten mit dem Zusatz, daß die Regularität von* $f(\zeta)$ *auf endlich vielen zu* σ_1 *parallelen Ausnahmestrecken aufhören kann.* $\iint_{\mathfrak{R}} |f'|^2 d\xi d\eta$ *braucht nicht zu existieren.* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}$ *sei irgendeine meßbare Punktmenge, die ganz dem Inneren des längs der Ausnahmestrecken aufgeschnittenen Rechtecks angehört. Es sei* $J = \overline{\lim} \iint_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}} |f'|^2 d\xi d\eta$ *endlich. Dann gilt*

$$\frac{a}{b} \leqq \frac{J}{\beta^2}, \tag{3}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur bei Ähnlichkeitstransformationen stehen kann.

Beweis: Die endlich vielen η-Werte, für die $f(\zeta)$ nicht durchweg regulär ist, werden in endlich viele Intervalle i der Gesamtlänge δ eingeschlossen.[9]) Der Beweisgang von Hilfssatz I liefert dann, wenn man die Streifen über diesen Intervallen fortläßt, $\frac{a-\delta}{b} \leqq \frac{J}{\beta^2}$. Da diese Ungleichung für beliebig kleine δ erfüllt ist, so gilt (3).

Ist $\int_0^b |f'|\, d\xi > \beta + c$ für ein reguläres η, so gilt das für ein η-Intervall l der Länge a', zu dem nur reguläre η gehören. Reicht l in keines der Intervalle i hinein, so ist $\frac{a-\delta}{b} < \frac{J}{\beta^2} - \frac{2a'c}{b\beta}$; das gilt für beliebig kleine δ, also

$$\frac{a}{b} \leqq \frac{J}{\beta^2} - \frac{2a'c}{b\beta}. \tag{4}$$

Soll $\frac{a}{b} = \frac{J}{\beta^2}$ sein, so müssen zunächst alle Parallelen zu σ_1 mit regulärem η in Parallelen zu g übergehen; durch Spiegelung folgt das auch für die Ausnahmewerte η. Damit haben wir Regularität im ganzen Rechteck und können Hilfssatz I anwenden.

Der Hilfssatz I tritt an die Stelle der Hilfssätze 1 und 2 in der Arbeit von GRÖTZSCH über Extremalprobleme.[10]) Hilfssatz II ersetzt die Erweiterungen dieser Hilfssätze. Die Beweismethode für unsern Hilfssatz I, die wesentlich die SCHWARZsche Integralungleichung be-

9) Es wird nicht benutzt, daß die Ausnahmewerte in endlicher Anzahl vorhanden sind, sondern es genügt die Tatsache, daß ihr lineares Maß o ist.

10) A. a. O. 1) a) I.

nutzt, ermöglicht eine Vereinfachung der Beweisführung für die Hilfssätze von Grötzsch.

Hilfssatz 1 von Grötzsch: *In* $0<r\leqq|z|\leqq 1$ *seien sich nicht überdeckende, höchstens Randlinien gemeinsam habende Flächenstreifen* $\mathfrak{S}_k$ *als schlichte konforme Bilder von Rechtecken* $\mathfrak{R}_k$ *mit den Seitenlängen* a_k, b_k *untergebracht.* $\mathfrak{R}_k$ *liege in der* ζ*-Ebene und werde durch die im abgeschlossenen* $\mathfrak{R}_k$ *reguläre Funktion* $g_k(\zeta)$ *auf* $\mathfrak{S}_k$ *so abgebildet, daß die Seiten der Länge* a_k *in Kreisbögen auf* $|z|=r$ *und* $|z|=1$ *übergehen. Dann gilt*

$$\sum_k \frac{a_k}{b_k} \leqq \frac{2\pi}{\log\frac{1}{r}}, \tag{5}$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann steht, wenn alle $\mathfrak{S}_k$ *durch Radialschlitzung entstehen und den Kreisring vollständig überdecken.*

Beweis: Der Kreisring werde längs einer der Begrenzungslinien von $\mathfrak{S}_1$ im Innern aufgeschnitten und durch einen Zweig von $\zeta_1=\log z$ abgebildet. Das Bild des Streifens $\mathfrak{S}_k$ habe den Inhalt J_k. Dann ist $\sum_k J_k \leqq 2\pi\log\frac{1}{r}$. $\mathfrak{R}_k$ denken wir uns so gelegen, daß die Seiten der Länge a_k der imaginären η-Achse parallel sind und eine Ecke o ist. Es sei $f_k(\zeta)=\log g_k(\zeta)$. Wie in I erhalten wir

$$J_k=\iint_{\mathfrak{R}_k}|f_k'|^2\,d\xi\,d\eta=\int_0^{a_k}\left\{\int_0^{b_k}|f_k'|^2\,d\xi\right\}d\eta\geqq\int_0^{a_k}\frac{1}{b_k}\left(\int_0^{b_k}|f_k'|\,d\xi\right)^2 d\eta.$$

Da $\int_0^{b_k}|f_k'|\,d\xi\geqq\log\frac{1}{r}$ ist, so gilt $J_k\geqq\frac{a_k}{b_k}\left(\log\frac{1}{r}\right)^2$ und damit (5). Soll das Gleichheitszeichen stehen, so muß für jedes k bei f_k jede Parallele zur reellen Achse in $\mathfrak{R}_k$ in eine Parallele zur reellen Achse übergehen, das Bild von $\mathfrak{R}_k$ muß ein Rechteck sein, weiter muß $\sum_k J_k=2\pi\log\frac{1}{r}$ gelten. Die Streifen entstehen also dann durch Radialschlitzung und müssen den Kreisring vollständig erfüllen.

Streicht man die Voraussetzung der Regularität von g_k am Rande von $\mathfrak{R}_k$, so schließt man ähnlich wie bei unserm Hilfssatz II.

Der Hilfssatz 2 von Grötzsch läßt sich in analoger Weise beweisen.

§ 2. Kreisbogen- und Radialschlitz-Theoreme.

Satz Ia: Das Kreisbogenschlitz-Theorem für den Kreisring. $w=f(z)$ *bilde das Innere des mit endlich vielen konzentrischen Kreisbogenschlitzen versehenen Kreisrings* $r<|z|<R$ *eineindeutig konform so ab, daß* o *und* ∞ *weder zum Inneren noch zum Rande des*

Bildes gehören, daß $|z| = r$ in das o *nächstgelegene Randstück* $\mathfrak{S}'$, $|z| = R$ *in das äußere Randstück* $\mathfrak{S}''$ *übergeht.* $\mathfrak{S}'$ *habe von* o *den Minimalabstand* m_r, $\mathfrak{S}''$ *habe von* o *die Maximalentfernung* M_R. *Dann gilt*

$$\frac{M_R}{m_r} \geqq \frac{R}{r}, \tag{6}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur bei $f(z) = \alpha z$ *mit konstantem* α *steht.*

Beweis: Wir schneiden den Kreisring längs eines Radius auf und bilden ihn durch einen Zweig von $\zeta = \log z$ auf ein Rechteck $\mathfrak{R}$ mit zur imaginären Achse parallelen Schlitzen ab. Wir können jetzt Hilfssatz II in dem geschlitzten $\mathfrak{R}$ auf $\zeta_1 = \log f(e^{\zeta})$ anwenden. Es sei σ_1 parallel der imaginären Achse, als g nehmen wir die imaginäre Achse. Dann ist $a = \log \frac{R}{r}$, $b = 2\pi$, $\beta = 2\pi$, $J \leqq 2\pi \log \frac{M_R}{m_r}$. Nach (3) gilt

$$\frac{\log \frac{R}{r}}{2\pi} \leqq \frac{2\pi \log \frac{M_R}{m_r}}{4\pi^2}, \quad \text{also} \quad \frac{M_R}{m_r} \geqq \frac{R}{r}.$$

Wenn das Gleichheitszeichen steht, so ist $\log f(e^{\zeta})$ eine Ähnlichkeitstransformation und zwar eine Translation, $\log f(e^{\zeta}) = \zeta + \log \alpha$, $f(z) = \alpha z$.

$\mathfrak{S}'$ sei im besonderen der Kreis $|z| = r'$, $\mathfrak{S}''$ der Kreis $|z| = R'$, dann gilt $\frac{R'}{r'} \geqq \frac{R}{r}$, wobei das Gleichheitszeichen nur bei $f(z) = \alpha z$ steht.[11])

Satz IIa: Das Radialschlitz-Theorem für den Kreisring. $w = f(z)$ *bilde den mit endlich vielen Radialschlitzen versehenen Kreisring* $r < |z| < R$ *eineindeutig konform so ab, daß* o *und* ∞ *weder zum Inneren noch zum Rande des Bildes gehören.* $\mathfrak{S}'$ *und* $\mathfrak{S}''$, *ebenso* M_R *und* m_r *mögen dieselbe Bedeutung wie im Satz* Ia *haben.* $\mathfrak{S}'$ *habe von* o *den Maximalabstand* M_r, $\mathfrak{S}''$ *habe von* o *den Minimalabstand* m_R. *Es sei* $m_R > M_r$. *Dann gilt*

$$\left(\log \frac{m_R}{M_r}\right)^2 \leqq \log \frac{M_R}{m_r} \cdot \log \frac{R}{r}; \tag{7}$$

das Gleichheitszeichen steht nur bei $f(z) = \alpha z$.

Beweis: Wir schneiden den Kreisring längs eines Radius auf. $\zeta = \log z$ liefert als Bild ein Rechteck $\mathfrak{R}$ mit zur reellen Achse parallelen Schlitzen. Wir wollen zunächst annehmen, daß $f(z)$ auf

11) Dieser Spezialfall von Satz Ia ist von Grötzsch (a. a. O. 1) a) I) bewiesen worden.

$|z| = r$ und $|z| = R$ noch analytisch ist. Wir können dann in $\mathfrak{R}$ auf $\zeta_1 = \log f(e^{\zeta})$ den Hilfssatz II anwenden. $a = 2\pi$, $b = \log \frac{R}{r}$, $J \leqq 2\pi \log \frac{M_R}{m_r}$. g sei die reelle Achse, dann ist $\beta = \log \frac{m_R}{M_r}$. Nach (3) ist

$$\frac{2\pi}{\log \frac{R}{r}} \leqq \frac{2\pi \log \frac{M_R}{m_r}}{\left(\log \frac{m_R}{M_r}\right)^2}, \quad \text{also} \quad \left(\log \frac{m_R}{M_r}\right)^2 \leqq \log \frac{M_R}{m_r} \cdot \log \frac{R}{r}.$$

Wenn das Gleichheitszeichen steht, so ist $\log f(e^{\zeta}) = \zeta + \log \alpha$ und $f(z) = \alpha z$. Ist $f(z)$ auf $|z| = r$ und $|z| = R$ nicht mehr analytisch, so wenden wir den obigen Satz zunächst auf den Kreisring $r < r' < |z| < R' < R$ an und lassen dann $r' \to r$ und $R' \to R$ konvergieren.

Geht im besonderen $|z| = R$ in $|w| = R_1$, $|z| = r$ in $|w| = r_1$ über, so gilt $\frac{R_1}{r_1} \leqq \frac{R}{r}$, das Gleichheitszeichen steht nur bei $f(z) = \alpha z$.[12])

Wir können nun entsprechende Theoreme für den geschlitzten Kreis und die geschlitzte Ebene aufstellen. Die Grenzübergänge vom Kreisring zum Kreis stützen sich im wesentlichen auf die Abschätzung (4) im Hilfssatz II. Sie ersetzt u. a. die Hilfssätze a und b von Grötzsch[13]), mit denen dort ähnliche Grenzübergänge vollzogen werden.

Satz Ib: Das Kreisbogenschlitz-Theorem für den Kreis. *$w = f(z)$ bilde das Innere des mit endlich vielen konzentrischen Kreisbogenschlitzen versehenen Kreises $|z| < R$ eineindeutig konform mit $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$ so ab, daß ∞ nicht zum Bilde oder Rande des Bildes gehört und $|z| = R$ in den äußeren Rand $\mathfrak{S}$ übergeht. $\mathfrak{S}$ habe von 0 die Maximalentfernung M. Dann gilt*

$$M \geqq R, \tag{8}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur bei $f(z) = e^{i\varphi} z$ mit konstantem φ steht.

Beweis: Alle Schlitze mögen außerhalb $|z| = \varrho$ liegen. $|w| \leqq q\varrho$ sei der größte Kreis, der ganz zum Bild von $|z| \leqq \varrho$ gehört. Wegen $|f'(0)| = 1$ ist $\lim_{\varrho \to 0} q = 1$. Von dem längs eines Radius aufgeschnittenen Kreisring (ϱ, R) gehen wir durch $\zeta = \log z$ zum Rechteck $\mathfrak{R}$ mit zur imaginären Achse parallelen Schlitzen über. In $\mathfrak{R}$ wenden wir auf $\zeta_1 = \log f(e^{\zeta})$ den Hilfssatz II und zwar die Abschätzung (4) an. s_1 ist parallel der reellen, g parallel der imaginären Achse. Es

12) Dieser Spezialfall von Satz IIa findet sich bei Grötzsch (a. a. O. 1) a) I).
13) A. a. O. 1) b) I.

ist $a = \log \frac{R}{\varrho}$, $b = 2\pi$, $\beta = 2\pi$, $\underline{J} \leqq 2\pi \log \frac{M}{q\varrho}$. Ist $f(z)$ keine Drehung, so gibt es ein Intervall der Länge a' auf s_1, so daß die zugehörigen Parallelen zu σ_1, die keinen Schlitz enthalten mögen, Bilder haben, deren Länge $l > 2\pi + c$ (c reell, > 0) ist. Nach (4) ist dann

$$\frac{\log \frac{R}{\varrho}}{2\pi} \leqq \frac{2\pi \log \frac{M}{q\varrho}}{(2\pi)^2} - \frac{2a'c}{4\pi^2}.$$

Lassen wir $\varrho \to 0$ gehen, so bleibt das Intervall auf s_1, für das die Bildlänge $l > 2\pi + c$ ist, erhalten. Die obige Abschätzung gilt bei festem a', c für beliebig kleine ϱ. Da $\lim_{\varrho \to 0} q = 1$ ist, so erhalten wir bei $M \leqq R$ für hinreichend kleine ϱ einen Widerspruch, also ist $M > R$.

$M = R$ steht nur bei Drehungen.

Ist $\mathfrak{S}$ im besonderen der Kreis $|w| = R_1$, so ist $R_1 \geqq R$, wobei $R_1 = R$ nur bei $f(z) = e^{i\varphi} z$ steht.

Satz IIb: Das Radialschlitz-Theorem für den Kreis. *$w = f(z)$ bilde das Innere des mit endlich vielen 0 nicht enthaltenden Radialschlitzen versehenen Kreises $|z| < R$ eineindeutig konform mit $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$ so ab, daß ∞ nicht zum Bild oder Rand des Bildes gehört und $|z| = R$ in den äußeren Rand $\mathfrak{S}$ übergeht. $\mathfrak{S}$ habe von 0 die Maximalentfernung M, den Minimalabstand m. Dann gilt*

$$m^2 \leqq M \cdot R, \tag{9}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur bei $f(z) = e^{i\varphi} z$ steht.

Beweis: Wir können annehmen, daß $f(z)$ auf $|z| = R$ noch analytisch ist. Alle Schlitze mögen außerhalb $|z| = \varrho$ liegen. $|w| \leqq q\varrho$ sei der größte Kreis, der im Bild von $|z| \leqq \varrho$ enthalten ist, $|w| \leqq q'\varrho$ der kleinste Kreis, der das Bild von $|z| \leqq \varrho$ enthält. Es ist $\lim_{\varrho \to 0} q = \lim_{\varrho \to 0} q' = |f'(0)| = 1$. Wir gehen wie in IIa vom Ring (ϱ, R) zum Rechteck $\mathfrak{R}$ über, in dem wir den Hilfssatz II auf $\zeta_1 = \log f(e^{\zeta})$ anwenden. Es ist s_1 parallel der imaginären, g parallel der reellen Achse. $a = 2\pi$, $b = \log \frac{R}{\varrho}$, $\beta = \log \frac{m}{q'\varrho}$, $\underline{J} \leqq 2\pi \log \frac{M}{q\varrho}$. Der hier durchzuführende Grenzübergang unterscheidet sich von dem in Ib dadurch, daß hier b und β nicht konstant sind.

Annahme: $f(z)$ sei keine Drehung. Dann ist $\log f(e^{\zeta})$ keine Ähnlichkeitstransformation. Es gibt auf s_1 ein Intervall i der Länge a',

so daß die zugehörigen Parallelen zu σ_1 ein Bild der Länge $l > \log \frac{m}{q'\varrho} + c$ (c reell, > 0) haben. Nach (4) gilt

$$\frac{2\pi}{\log \frac{R}{\varrho}} \leqq \frac{2\pi \log \frac{M}{q\varrho}}{\left(\log \frac{m}{q'\varrho}\right)^2} - \frac{2a'c}{\log \frac{R}{\varrho} \cdot \log \frac{m}{q'\varrho}}.$$

Geht $\varrho \to 0$, so bleiben auf i die Bildlängen $l > \log \frac{m}{q'\varrho} + c$; in der obigen Abschätzung sind a', c fest bei $\varrho \to 0$. Aus der obigen Ungleichung folgt

$$2\pi \left(\log \frac{m}{q'\varrho}\right)^2 \leqq 2\pi \log \frac{M}{q\varrho} \cdot \log \frac{R}{\varrho} - 2a'c \log \frac{m}{q'\varrho},$$

$$2\pi \left(\log \frac{1}{\varrho}\right)^2 + 4\pi \log \frac{m}{q'} \log \frac{1}{\varrho} + 2\pi \left(\log \frac{m}{q'}\right)^2 \leqq 2\pi \left(\log \frac{1}{\varrho}\right)^2$$

$$+ 2\pi \log \frac{1}{\varrho} \left(\log \frac{M}{q} + \log R\right) + 2\pi \log \frac{M}{q} \log R - 2a'c \log \frac{1}{\varrho} - 2a'c \log \frac{m}{q'},$$

$$2a'c + 2\pi (\log m^2 + \log MR) - 4\pi \log q' + 2\pi \log q \leqq \frac{1}{\log \frac{1}{\varrho}} C,$$

wobei C bei $\varrho \to 0$ beschränkt ist. Da $\lim\limits_{\varrho \to 0} q = \lim\limits_{\varrho \to 0} q' = 1$ ist, $a'c > 0$ ist und $\frac{1}{\log \frac{1}{\varrho}} C \xrightarrow[\varrho \to 0]{} 0$ geht, so führt $m^2 \geqq MR$ bei hinreichend kleinem ϱ zum Widerspruch. Es gilt also $m^2 < MR$ unter unserer Annahme. $m^2 = MR$ steht nur bei Drehungen. Geht im Sonderfall $|z| = R$ in $|w| = R_1$ über, so ist $R_1^2 \leqq R_1 R$ oder $R_1 \leqq R$; $R_1 = R$ gilt nur bei $f(z) = e^{i\varphi} z$.

Sätze Ic und IIc: Kreisbogenschlitz- und Radialschlitz-Theorem für die Ebene.

Satz Ic: *$w = f(z)$ bilde das Innere der längs endlich vielen Kreisbögen mit 0 als Mittelpunkt geschlitzten Ebene eineindeutig konform ab. Die Entwicklung in ∞ sei $f(z) = a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \cdots$ mit $|a_1| = 1$. Dann gilt*

(10) $$|f'(0)| \leqq 1,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur bei Bewegungen steht.

Satz IIc: *Haben wir statt der Schlitze auf Kreisbögen um 0 Schlitze auf Halbstrahlen durch 0, die 0 und ∞ nicht enthalten, so gilt bei*

Abbildungen $w = f(z)$ *der so geschlitzten Ebene mit denselben Eigenschaften wie in* Ic

$$|f'(0)| \geqq 1, \tag{11}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur bei Bewegungen steht.[14])

Beweis von Ic: Wir können $f(0) = 0$ annehmen. Es mögen alle Schlitze in $r < |z| < R$ liegen. $|w| = qr$ sei der größte Kreis um 0, den das Bild von $|z| = r$ im Inneren enthält, $|w| = Q'R$ der kleinste Kreis um 0, der das Bild von $|z| = R$ enthält. Wir wenden nun die Betrachtung aus dem Beweis von Ib auf den Kreisring (r, R) an. Ist $f(z)$ keine Drehung, so gilt

$$\frac{\log \frac{R}{r}}{2\pi} \leqq \frac{\log \frac{Q'R}{qr}}{2\pi} - \frac{2a'c}{4\pi^2},$$

wobei a' und c bei hinreichend kleinem r und hinreichend großem R konstant sind. Da $\lim_{R\to\infty} Q' = 1$, $\lim_{r\to 0} q = |f'(0)|$ ist, so gilt

$$0 \leqq \frac{\log \frac{1}{|f'(0)|}}{2\pi} - \frac{2a'c}{4\pi^2},$$

also $|f'(0)| < 1$. $|f'(0)| = 1$ steht nur bei Bewegungen.

Beweis von IIc: Es sei $f(0) = 0$. Alle Schlitze seien in $r < |z| < R$ enthalten. q und Q' mögen dieselbe Bedeutung wie in Ic haben. $|w| = q'r$ sei der kleinste Kreis um 0, der das Bild von $|z| = r$ enthält, $|w| = QR$ sei der größte Kreis um 0, den das Bild von $|z| = R$ enthält. Nach dem Vorgang von IIb, auf den Kreisring (r, R) angewandt, erhalten wir, wenn $f(z)$ keine Drehung ist,

$$\frac{2\pi}{\log \frac{R}{r}} \leqq \frac{2\pi \log \frac{Q'R}{qr}}{\left(\log \frac{QR}{q'r}\right)^2} - \frac{2a'c}{\log \frac{R}{r} \log \frac{QR}{q'r}},$$

wobei a', c für $R \to \infty$, $r \to 0$ fest sind.

$$2\pi\left(\log \frac{Q}{q'} + \log \frac{R}{r}\right)^2 \leqq 2\pi\left(\log \frac{Q'}{q} + \log \frac{R}{r}\right) \log \frac{R}{r} - 2a'c\left(\log \frac{R}{r} + \log \frac{Q}{q'}\right),$$

$$2\pi\left(\log \frac{R}{r}\right)^2 + 4\pi \log \frac{Q}{q'} \log \frac{R}{r} + 2\pi\left(\log \frac{Q}{q'}\right)^2 \leqq 2\pi\left(\log \frac{R}{r}\right)^2 + 2\pi \log \frac{Q'}{q} \log \frac{R}{r} - 2a'c \log \frac{R}{r} - 2a'c \log \frac{Q}{q'},$$

$$2a'c + 4\pi \log \frac{Q}{q'} - 2\pi \log \frac{Q'}{q} \leqq \frac{1}{\log \frac{R}{r}} C,$$

14) Die Sätze Ic und IIc sind von Grötzsch a. a. O. 1) b) I auf ganz anderem Wege gewonnen worden.

wobei C beschränkt bleibt bei $r \to 0$, $R \to \infty$. Es ist $\lim_{R\to\infty} Q = \lim_{R\to\infty} Q' = 1$ und $\lim_{r\to 0} q = \lim_{r\to 0} q' = |f'(0)|$. Da oben die rechte Seite beliebig klein wird, so muß $\log \frac{1}{|f'(0)|} < 0$ sein, also $|f'(0)| > 1$. $|f'(0)| = 1$ steht nur bei Bewegungen.[15])

§ 3. Die Szegösche Vermutung.

Unter K_0 wollen wir $|z| < 1$, unter $\widehat{K_0}$ das Innere des mit endlich vielen konzentrischen Kreisbogenschlitzen versehenen Einheitskreises verstehen. K_r stehe für $r < |z| < 1$, $\widehat{K_r}$ für das Innere des längs endlich vielen konzentrischen Kreisbögen aufgeschnittenen K_r. Unter Abbildung sei im folgenden eine eindeutige konforme Abbildung verstanden. Eine Abbildung $w = f(z)$ von K_0 oder $\widehat{K_0}$ heißt normiert, wenn $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$ ist, bei K_r, $\widehat{K_r}$ heißt $w = f(z)$ normiert, wenn $|z| = r$ als Ganzes in $|w| = r$ übergeht und alle Bildpunkte außerhalb $|w| = r$ liegen.

Satz III: *$w = f(z)$ bilde $\widehat{K_0}$ schlicht normiert ab. Der Peripherie $|z| = 1$ möge das Randstück $\mathfrak{S}$ entsprechen (∞ kann Bildpunkt sein). Durch $w = 0$ nehmen wir n gleichwinklig verteilte Halbstrahlen, die alle $\mathfrak{S}$ treffen mögen. Für die Maximalentfernung d der 0 nächstbenachbarten Punkte von $\mathfrak{S}$ auf diesen Halbstrahlen gelte $d \leqq c$ (c reell, $\sqrt[n]{\frac{1}{4}} \leqq c \leqq \infty$). Nehmen wir nun die n gleichwinklig verteilten Halbstrahlen durch $w = 0$, die die Winkel zwischen den ersteren halbieren, so trifft entweder mindestens einer dieser Halbstrahlen $\mathfrak{S}$ nicht, oder für die Maximalentfernung d_1 der 0 nächstbenachbarten Punkte von $\mathfrak{S}$ auf diesen Halbstrahlen gilt*

$$d_1 \geqq \sqrt[n]{\frac{c^n}{4c^n - 1}}. \tag{12}$$

Das Gleichheitszeichen steht nur bei $f(z) = e^{i\alpha}\, {}_cE^n(e^{i\beta} z)$, wobei

$${}_cE^n(z) = \frac{z}{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{c^n} - 2\right) z^n + z^{2n}}}$$

gesetzt ist.

Beweis: $w = {}_cE^n(z)$ mit reellem $c \geqq \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ bildet K_0 schlicht normiert auf die längs der Halbstrahlen des Arguments $\varphi = \frac{2\pi}{n} \varkappa$

15) Entsprechend der Anm. 9 lassen sich alle Sätze I und II auf gewisse Fälle mit unendlich vielen Schlitzen verallgemeinern.

($\varkappa = 0, \ldots n-1$) vom Betrag c nach ∞, des Arguments $\varphi = \frac{\pi}{n}(2\varkappa+1)$ ($\varkappa = 0, \ldots n-1$) vom Betrag $\sqrt[n]{\frac{c^n}{4c^n-1}}$ nach ∞ geschlitzte Ebene ab.

Die betrachteten ersten n Halbstrahlen mögen die Argumente $\varphi = \frac{2\pi}{n}\varkappa$ ($\varkappa = 0, \ldots n-1$) haben. Wir nehmen an, daß jeder der zweiten n Halbstrahlen $\mathfrak{S}$ trifft und $d_1 \leqq \sqrt[n]{\frac{c^n}{4c^n-1}}$ gilt, und zeigen, daß dann $f(z)$ sich von ${}_cE^n(z)$ nur um Drehungen unterscheidet.

Alle Schlitze von $\widehat{K_0}$ mögen außerhalb $z = \varrho$ liegen. $|z_1| \leqq q\varrho$ sei der größte Kreis um 0, der ganz im Bild von $|z| \leqq \varrho$ bei der Abbildung $z_1 = {}_cE^{n-1}[f(z)]$ enthalten ist.[16]) Da $\left|\frac{d}{dz}\,{}_cE^{n-1}[f(z)]_{z=0}\right| = 1$ ist, so ist $\lim_{\varrho \to 0} q = 1$. Von $\widehat{K_\varrho}$ gehen wir durch einen Zweig von $\zeta = \log z$ zum geschlitzten Rechteck $\overline{\mathfrak{R}}$ über. Die Schlitze sind parallel zur imaginären Achse. Im Innern von $\overline{\mathfrak{R}}$ untersuchen wir $g(\zeta) = \log {}_cE^{n-1}[f(e^\zeta)]$. Es ist möglich, daß im Bild von $\mathfrak{R}$ bei $w = f(e^\zeta)$ Verzweigungspunkte von ${}_cE^{n-1}(w)$ liegen. Die endlich vielen Parallelen zur imaginären Achse in $\mathfrak{R}$, deren Bild bei $w = f(e^\zeta)$ durch einen Verzweigungspunkt von ${}_cE^{n-1}(w)$ geht oder auf denen ein Schlitz liegt, dessen zugehöriges Randstück im Bilde von $\overline{\mathfrak{R}}$ durch $f(e^\zeta)$ einen Verzweigungspunkt von ${}_cE^{n-1}$ enthält oder umschließt, werden aus $\mathfrak{R}$ herausgenommen. Im Inneren jedes der so entstehenden geschlitzten Teilrechtecke ist $g(\zeta)$ regulär und eindeutig, denn bei Umlaufung eines Schlitzes im Inneren eines Teilrechteckes ändert sich $g(\zeta)$ nicht. Für das Gesamtbild aller Teilrechtecke bei $g(\zeta)$ gilt $J \leqq 2\pi \log \frac{1}{q\varrho}$. Bildet man nämlich ein schlichtes meßbares Gebiet $\mathfrak{G}$ der w-Ebene ($w = u + iv$), in dem $\zeta_1 = \log {}_cE^{n-1}(w)$ regulär eindeutig ist, durch $\zeta_1 = \log {}_cE^{n-1}(w)$ ab, so ist $J_{\mathfrak{G}} = \iint_{\mathfrak{G}} |(\log {}_cE^{n-1}(w))'|\, du\, dv$ unabhängig davon, welchen Zweig von ${}_cE^{n-1}(w)$ man nimmt. Hier wird die Symmetrieeigenschaft von ${}_cE^{n-1}(w)$ benutzt. Wir gehen von einem Blatt der RIEMANNschen Fläche von ${}_cE^{n-1}(w)$ zum nächsten über, indem wir an einer Strecke $0 - {}_cE^n\left(e^{\frac{\pi}{n}\lambda i}\right)$ und dann an einem Ufer des Schlitzes auf demselben Halbstrahl spiegeln. Dem entspricht in der ζ_1-Ebene Spiegelung an zwei Geraden. Da nun $f(e^\zeta)$ in $\mathfrak{R}$ schlicht ist, so gilt $J \leqq 2\pi \log \frac{1}{q\varrho}$.

16) $z = {}_cE^{n-1}(w)$ soll die zu $w = {}_cE^n(z)$ inverse Funktion sein.

Im ersten der Teilrechtecke $\mathfrak{R}_1$, dessen eine Ecke $\log \varrho$ ist, haben bei $\zeta_1 = g(\zeta)$ die Endpunkte des Bildes einer schlitzfreien Parallelen zur imaginären Achse Imaginärteile, deren Differenz dem Betrag nach 2π ist. Für die Parallelen in den anderen Rechtecken werden wir unten zeigen, daß man auf jeder von ihnen $2n$ Strecken so wählen kann, daß das Bild jeder Strecke Endpunkte besitzt, deren Imaginärteile um mindestens $\frac{\pi}{n}$ verschieden sind. Wir können die Abschätzungen aus Hilfssatz II auf $\zeta_1 = g(\zeta)$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ anwenden. $a = \log \frac{1}{r}$, $b = 2\pi$, $\beta = 2\pi$. Ist $g(\zeta)$ keine Ähnlichkeitstransformation, so gibt es in $\overline{\mathfrak{R}}_1$ auf s_1 ein Intervall der Länge a', so daß die zugehörigen Parallelen zur imaginären Achse eine Bildlänge $l > 2\pi + c_1$ haben (c_1 reell, > 0). Dann ist $\frac{\log \frac{1}{\varrho}}{2\pi} \leqq \frac{J}{(2\pi)^2} - \frac{2a'c_1}{(2\pi)^2}$ mit $J \leqq 2\pi \log \frac{1}{q\varrho}$. Da bei $\varrho \to 0$ die Werte a' und c_1 konstant sind, aber $q \to 1$ geht, so haben wir für hinreichend kleine ϱ einen Widerspruch. Also aus $d_1 \leqq \sqrt[n]{\frac{c^n}{4c^n - 1}}$ folgt $g(\zeta) = \zeta + i\beta$, $f(z) = {}_cE^n(e^{i\beta}z)$. Es gilt also $d_1 \geqq \sqrt[n]{\frac{c^n}{4c^n - 1}}$; das Gleichheitszeichen steht nur bei $f(z) = e^{i\alpha}\,{}_cE^n(e^{i\beta}z)$.

Wir haben nur noch die Behauptung über die Bildlänge der Parallelen zur imaginären Achse in den Teilrechtecken von $\overline{\mathfrak{R}}$ zu beweisen. Eine solche schlitzfreie Parallele geht bei $w = f(e^{\zeta})$ in eine einfach geschlossene analytische Kurve $\mathfrak{C}$ über. Setzen wir $\log {}_cE^{n-1}(w)$ längs $\mathfrak{C}$ von einem Punkt aus fort, so können wir $2n$ Teilbögen auf $\mathfrak{C}$ so angeben, daß die Endpunkte der Bildbögen Imaginärteile haben, die um mindestens $\frac{\pi}{n}$ verschieden sind. Wir laufen auf den Halbstrahlen vom Argument $\varphi = \frac{\pi}{n}\lambda$ ($\lambda = 0, 1, \ldots 2n-1$) in der w-Ebene von 0 in Richtung ∞, bis wir zum erstenmal auf $\mathfrak{C}$ bei P_λ stoßen. Unter unserer Annahme $d \leqq c$, $d_1 \leqq \sqrt[n]{\frac{c^n}{4c^n - 1}}$ liegt P_λ auf der Strecke $0 - {}_cE^n\left(e^{\frac{\pi i}{n}\lambda}\right)$. Der Bildpunkt von $P_{2\varkappa}$ ($\varkappa = 0, \ldots n-1$) hat bei der Abbildung $\zeta_1 = \log {}_cE^{n-1}(w)$ unabhängig von dem Zweig von ${}_cE^{n-1}(w)$ einen Imaginärteil $\frac{2\pi}{n}\mu$ (μ ganz), der Bildpunkt von $P_{2\varkappa+1}$ ($\varkappa = 0, 1, \ldots n-1$) einen Imaginärteil $\frac{\pi}{n}(2\nu + 1)$ (ν ganz).

Wir laufen von P_λ aus auf $\mathfrak{C}$ in einem bestimmten Richtungssinn. Der nächste P-Punkt, auf den wir stoßen, sei $P_\varkappa$. Es ist $P_\varkappa = P_{\lambda+1}$ oder $P_\varkappa = P_{\lambda-1}$. Wäre $\varkappa \neq \lambda + 1$, $\varkappa \neq \lambda - 1$, so ziehen wir noch

die Strecken $o P_\lambda$ und $o P_\varkappa$. B sei einer der Bereiche, die von dem oben durchlaufenen Stück $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{C}$ und den Strecken $o\overline{P_\lambda}$ und $o\overline{P_\varkappa}$ begrenzt sind. In der Nähe von o verläuft entweder der Halbstrahl $\varphi = \frac{\pi}{n}(\lambda + 1)$ oder der Halbstrahl $\varphi = \frac{\pi}{n}(\lambda - 1)$ in B. Wir können das erstere annehmen, dann liegt der Halbstrahl $\varphi = \frac{\pi}{n}(\lambda - 1)$ in der Nähe von o außerhalb von B. Da $P_{\lambda+1}$ und $P_{\lambda-1}$ nicht auf $\mathfrak{C}_1$ liegen, so ist $P_{\lambda+1}$ im Innern, $P_{\lambda-1}$ im Äußeren von B gelegen. Das von $\mathfrak{C}_1$ verschiedene Stück $\mathfrak{C}_2$ von $\mathfrak{C}$ geht durch $P_{\lambda+1}$ und $P_{\lambda-1}$, muß also den Rand von B durchsetzen. Da $\mathfrak{C}$ sich nicht überschneiden darf, so muß $\mathfrak{C}_2$ mindestens eine der Strecken $o\overline{P_\lambda}$, $o\overline{P_\varkappa}$ im Innern durchsetzen. Das widerspricht der Definition von P_λ und $P_\varkappa$. Es ist also $\varkappa = \lambda + 1$ oder $\varkappa = \lambda - 1$. Laufen wir bei $\varkappa = \lambda + 1$ in dem einmal festgelegten Sinne auf $\mathfrak{C}$ weiter, so folgt $P_{\lambda+2}$ als nächster P-Punkt. Die P-Punkte kommen in zyklischer Reihenfolge. Bei $\varkappa = \lambda - 1$ tritt die entgegengesetzte Reihenfolge auf.

Das Bild der Endpunkte der betrachteten Parallelen zur imaginären Achse bei $w = f(e^{\zeta})$ sei Q. Durchlaufen wir die Parallele im Sinne wachsender Imaginärteile, so wird $\mathfrak{C}$ von Q aus in einem bestimmten Sinne durchlaufen. Der erste der P-Punkte, auf den man stößt, sei P_λ. Setzen wir $\log {}_c E^{n-1}(w)$ von Q aus längs $\mathfrak{C}$ fort, so haben die Bilder zweier aufeinanderfolgenden P Imaginärteile, die um mindestens $\frac{\pi}{n}$ verschieden sind. Wir haben uns nur noch zu überlegen, daß die Bilder von $\overset{\frown}{Q P_\lambda}$ und $\overset{\frown}{P_{\lambda-1} Q}$ bzw. $\overset{\frown}{P_{\lambda+1} Q}$ zusammen eine Länge $l \geqq \frac{\pi}{n}$ haben. Das ist klar, da die Bildlänge eines Kurvenstückes unabhängig ist von dem Zweig von ${}_c E^{n-1}(w)$.

Wir können jetzt die Vermutung von SZEGÖ in verallgemeinerter Form aus dem Satz III herleiten. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. n sei gerade, $n = 2m$. $w = f(z)$ bilde $\overset{\frown}{K_0}$ schlicht normiert ab. Der Peripherie $|z| = 1$ entspreche $\mathfrak{S}$. Wir legen irgend n gleichwinklig verteilte Halbstrahlen durch $w = 0$. Entweder trifft einer der Halbstrahlen $\mathfrak{S}$ nicht, oder für die Maximalentfernung d der o nächstbenachbarten Punkte von $\mathfrak{S}$ auf den Halbstrahlen gilt

$$d \geqq \sqrt[n]{\tfrac{1}{4}}, \tag{13}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur bei $f(z) = e^{i\alpha} E^n(e^{i\beta} z)$ steht. Dabei ist $E^n(z) = \frac{z}{\sqrt[n]{(1+z^n)^2}}$[17]) gesetzt.

17) Diese Bezeichnung stammt von Grötzsch a. a. O. 1) a) I.

Beweis: Diese Behauptung folgt aus Satz III, wenn wir zum Vergleich $w = {}_cE^m(z)$ mit $c = \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ heranziehen. Dann ist nämlich $\sqrt[m]{\frac{c^m}{4c^m - 1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ und ${}_cE^m(z) = \frac{z}{\sqrt[n]{(1 + z^n)^2}} = E^n(z)$.

2. n sei ungerade. Die obige Behauptung gilt auch hier für irgend n gleichwinklig verteilte Halbstrahlen durch o, sofern ∞ auf keinem Halbstrahl durch o von o aus erreichbar ist, ohne $\mathfrak{S}$ zu treffen.

Beweis: Wir benutzen Satz III, indem wir zum Vergleich $w = {}_cE^n(z)$ mit $c = \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ heranziehen. Dann ist ${}_cE^n(z) = E^n(z)$, und $\sqrt[n]{\frac{c^n}{4c^n - 1}}$ wird ∞.

Für Funktionen $w = f(z)$ aus Satz III mit $|f(z)| \leqq R$[18]) $(R \geqq 1)$ in $\widehat{K_0}$ können wir eine Verschärfung von Satz III beweisen. Die durch $\frac{1}{w^n} + \frac{w^n}{R^{2n}} = z^n + \frac{1}{z^n} + b$ $\left(b \text{ reell}, |b| \leqq 2 - \frac{2}{R^n}\right)$ gegebene Funktion $w = {}_cE^n_{o,R}(z)$ bildet K_0 schlicht normiert in das Innere des auf den Radien des Arguments $\varphi = \frac{2\pi}{n}\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots n-1)$ vom Betrag $c = c(b, R)$ nach R, des Arguments $\varphi = \frac{2\pi}{n}(\varkappa + 1)$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots n-1)$ vom Betrag $c_1 = c_1(b, R)$ nach R eingeschnittenen Kreises $|w| < R$ ab. c und c_1 sind gegeben durch $\frac{1}{c^n} + \frac{c^n}{R^{2n}} = 2 + b$ und $\frac{1}{c_1^n} + \frac{c_1^n}{R^{2n}} = 2 - b$.

Satz IV: *Zu den Voraussetzungen von Satz* III *möge noch* $f(z) < R$ *hinzukommen. Gilt dann* $d \leqq c(b, R)$ *mit einem bestimmten* b *mit* $|b| \leqq 2 - \frac{2}{R^n}$, *so gilt*

(14) $\qquad d_1 \geqq c_1(b, R) \quad mit \quad \frac{1}{c_1^n} + \frac{c_1^n}{R^{2n}} = 4 - \frac{1}{c^n} - \frac{c^n}{R^{2n}}.$

Das Gleichheitszeichen steht nur bei $f(z) = e^{i\alpha}\,{}_cE^n_{o,R}(e^{i\beta}z)$.

§ 4. Folgerungen und verwandte Probleme.

Durch Heranziehung von Schlitzabbildungen, die aus ${}_cE^n(z)$ durch lineare Transformationen entstehen, kommen wir zu Schlitztheoremen, die Verallgemeinerungen bekannter Sätze sind.

Satz V: $\eta = \varphi(\zeta)$ *bilde das mit endlich vielen konzentrischen Kreisbogenschlitzen versehene Äußere* $\widehat{A_0}$ *von* $|\zeta| = 1$ *schlicht mit* $\varphi(\zeta) = a_1\zeta + a_0 + \frac{a}{\zeta^1} + \cdots$ $(|a_1| = 1)$ *im Unendlichen ab. Der Peri-*

18) A. a. O. 8).

pherie $|\zeta| = 1$ *möge das Randstück* $\mathfrak{T}$ *entsprechen. Von dem endlichen Punkt a der* η*-Ebene aus ziehen wir n gleichwinklig verteilte Halbstrahlen, die alle* $\mathfrak{T}$ *treffen mögen. Für die Minimalentfernung* δ *der von a entferntesten Punkte von* $\mathfrak{T}$ *auf den Halbstrahlen gelte* $\delta \geqq \frac{1}{c}$ $\left(c \text{ reell}, 0 \leqq \frac{1}{c} \leqq \sqrt[n]{4}\right)$. *Wir nehmen nun die n gleichwinklig verteilten Halbstrahlen durch* $\eta = a$, *die die Winkel zwischen den ersteren halbieren und* $\mathfrak{T}$ *treffen mögen. Für die Minimalentfernung* δ_1 *der von a entferntesten Punkte von* $\mathfrak{T}$ *auf diesen Halbstrahlen gilt*

$$\delta_1 \leqq \sqrt[n]{\frac{4c^n - 1}{c^n}}, \tag{15}$$

das Gleichheitszeichen steht nur bei

$$\varphi(\zeta) = e^{i\beta}\sqrt[n]{(e^{i\alpha}\zeta)^n + \frac{1}{(e^{i\alpha}\zeta)^n} - 2 + \frac{1}{c^n}} + a.$$

Beweis: Wir wenden Satz III auf $f(z) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right) - a}$ an. $z = \frac{1}{\zeta}$ führt $\widehat{A_0}$ in ein $\widehat{K_0}$ über, das durch $f(z)$ schlicht normiert abgebildet wird.

Für $n = 1$ ergibt Satz V den von GRÖTZSCH[19]) bewiesenen Satz, daß der Durchmesser von $\mathfrak{T}$ einen Wert $d \leqq 4$ hat, wobei $d = 4$ nur bei $\varphi(\zeta) = e^{i\beta}\left(e^{i\alpha}\zeta + \frac{1}{e^{i\alpha}\zeta}\right) + \text{const.}$ steht.

Zu jeder Funktion $w = \frac{a e^{i\beta}{}_c E^n(z)}{a + e^{i\beta}{}_c E^n(z)}$ $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{4}} \leqq c \leqq \infty, a \text{ beliebig komplex}\right)$, die K_0 schlicht normiert so abbildet, daß $|z| = 1$ in ein Kontinuum übergeht, das aus Schlitzen besteht, die von $w = a$ ausgehen und auf $2n$ gleichwinklig verteilten Kreisbögen durch 0 und a liegen, läßt sich ein Satz III entsprechender Satz aufstellen. Laufen wir unter den Voraussetzungen von Satz III von 0 aus auf den obigen $2n$ Kreisbögen, die alle $\mathfrak{S}$ schneiden mögen, bis zu den ersten Treffpunkten mit $\mathfrak{S}$, so können diese nicht alle vor oder an den Schlitzenden der obigen Abbildung erreicht werden, sofern nicht $f(z) = \frac{a e^{i\beta}{}_c E^n(e^{i\alpha} z)}{a + e^{i\beta}{}_c E^n(e^{i\alpha} z)}$ ist.

Der Fall $n = 1$, $c = \infty$ sei noch besonders formuliert.

Satz VI: $w = f(z)$ *bilde* $\widehat{K_0}$ *schlicht normiert ab, dabei soll* $|z| = 1$ *in* $\mathfrak{S}$ *übergehen. Auf einem Kreise durch* 0 *und a, dessen Tangente in* 0 *mit der positiv reellen Achse den Winkel* β *bilde, laufen wir*

19) A. a. O. 1) b).

von o *aus in der Richtung* β. *Wir mögen* $\mathfrak{S}$ *treffen, und zwar das erstemal vor a, das letztemal bei b. Dann liegt auf unserm Wege b vor dem Punkt* $-\frac{ae^{i\beta}}{4a-e^{i\beta}}$ *dieses Kreises.* $b=-\frac{ae^{i\beta}}{4a-e^{i\beta}}$ *gilt nur bei* $f(z)=\frac{ae^{i\beta}z}{a(1-2z+z^2)+e^{i\beta}z}$.[20])

Hieraus ergibt sich folgende Verallgemeinerung des Koebeschen Viertelsatzes:

Satz VIa: $w=f(z)$ *bilde* $\widehat{K_0}$ *schlicht normiert ab, der Peripherie* $|z|=1$ *entspreche* $\mathfrak{S}$. *Der Punkt* $a\neq 0$ *gehöre zu* $\mathfrak{S}$ *oder sei so gelegen, daß wir von* o *auf keinem Kreise durch* o *und a nach a gelangen können, ohne* $\mathfrak{S}$ *zu treffen (a kann aber Bildpunkt sein). Dann ist* $\mathfrak{S}$ *in dem Kreise* $\left|\frac{1}{w}-\frac{1}{a}\right|\leqq 4$ *gelegen, und* $\mathfrak{S}$ *erreicht den Rand des Kreises nur bei* $f(z)=\frac{ae^{i\beta}z}{a(1-2z+z^2)+e^{i\beta}z}$.

Aus Satz VIa erhält man ferner folgende Aussage über $\mathfrak{S}$.

Satz VIb: *Hat* $\mathfrak{S}$ *von* o *die Minimalentfernung* $m\leqq m_0\leqq\frac{1}{4}$ *und die Maximalentfernung M, so gilt*

$$M\leqq M_0=\frac{m_0}{-4m_0+1}. \tag{16}$$

Das Gleichheitszeichen steht nur bei $f(z)=\frac{m_0e^{i\beta}z}{m_0(1-2z+z^2)+z}$.

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus Satz VIa, denn der Kreis $\left|\frac{1}{w}-\frac{1}{a}\right|\leqq 4$ zu einem Punkt $me^{i\beta}$ mit $m\leqq m_0$ ist in $|w|\leqq M_0$ enthalten.

Die Gleichung $m_0=\frac{1}{M_0}$ ist für $m_0=-2+\sqrt{5}$ erfüllt. Daher enthält Satz VIb folgenden Satz von Bieberbach[21]), der ohne Schrankenbestimmung von Montel herrührt:

$w=f(z)$ bilde K_0 schlicht normiert ab. Dann gibt es eine positive Zahl δ, so daß im Bildbereich entweder $|w|<\delta$ oder $|w|>\frac{1}{\delta}$ enthalten ist, dabei kann man $\delta=-2+\sqrt{5}$ nehmen und durch keine größere Zahl ersetzen.

Im engen Zusammenhang mit den Sätzen III—V stehen noch eine Reihe weiterer Probleme.

---

20) Bei der Angabe der Extremalabbildungen in den Sätzen VI sind Drehungen von $\widehat{K_0}$ in der z-Ebene vernachlässigt. 21) A. a. O. 5) b).

B sei ein endlich vielfach zusammenhängender schlichter Bereich der w-Ebene, der o im Innern enthalte. $\mathfrak{S}$ sei ein Randstück von B. Es existiert eine schlichte Abbildung $z = \varphi(w)$ mit $\varphi(0) = 0$, $|\varphi'(0)| = 1$ von B auf das Innere eines längs Kreisbögen um o geschlitzten Kreises $|z| = \varrho$, wobei $\mathfrak{S}$ der Kreis $|z| = \varrho$ entspricht. Zu den Sätzen III und IV lassen sich jetzt Theoreme über den Abbildungsradius ϱ aufstellen.

Satz VII: *Wir nehmen durch $w = 0$ die Halbstrahlen des Arguments $\beta_0 + \frac{2\pi}{n}\varkappa$ $(\varkappa = 0, \ldots n-1)$ und $\beta_0 + \frac{\pi}{n}(2\varkappa+1)$ $(\varkappa = 0, \ldots n-1)$, die alle $\mathfrak{S}$ treffen mögen. Für die Maximalentfernung von o der o nächstbenachbarten Punkte von $\mathfrak{S}$ auf den ersten n Halbstrahlen gelte $d \leqq c$, auf den letzten n Halbstrahlen $d_1 \leqq c_1$ $(0 < c \leqq \infty,\ 0 < c_1 \leqq \infty)$. Dann gilt*

$$\varrho \leqq \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{c\, c_1 \sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{c^n + c_1^n}}, \tag{17}$$

wobei α der Radius des Kreises ist, auf den die längs der ersten n Halbstrahlen vom Betrag c nach ∞, längs der zweiten n Halbstrahlen vom Betrag c_1 nach ∞ geschlitzte Ebene B^* schlicht durch $z = \varphi^*(w)$ mit $\varphi^*(0) = 0$, $|\varphi^{*\prime}(0)| = 1$ abgebildet wird. $\varrho = \alpha$ gilt nur, wenn $\varphi(w) = e^{i\beta}\varphi^*(w)$ ist, d. h. wenn $\mathfrak{S}$ gleich dem Rand von B^* ist und alle weiteren Randstücke von B Schlitze sind, die bei $\varphi^*(w)$ in Kreisbogenschlitze mit dem Mittelpunkt o übergehen.

Beweis: Annahme: $\varrho \geqq \alpha$. Dann wird der mit endlich vielen konzentrischen Kreisbogenschlitzen versehene Kreis $|z| < \alpha$ durch $w = \varphi^{-1}(z)$ schlicht normiert so abgebildet, daß die o nächstbenachbarten Punkte des Bildes von $|z| = \alpha$ auf den Halbstrahlen $\beta_0 + \frac{2\pi}{n}\varkappa$ eine Maximalentfernung $d' \leqq c$, auf den Halbstrahlen $\beta_0 + \frac{\pi}{n}(2\varkappa+1)$ eine Maximalentfernung $d_1' \leqq c_1$ haben, wobei die Werte c und c_1 bei der Schlitzabbildung $w = \varphi^{*-1}(z)$ von $|z| < \alpha$ angenommen werden. Dann ist nach Satz III $\varphi^{-1}(z) = \varphi^{*-1}(e^{-i\beta}z)$. Es ist

$$\varphi^{*-1}(z) = \frac{e^{i\beta_0} z}{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{\alpha^n}{c^n} - 2\right)\left(\frac{z}{\alpha}\right)^n + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{2n}}},$$

$$c_1 = \frac{\alpha}{\sqrt[n]{4 - \frac{\alpha^n}{c^n}}},$$

$$\alpha = \frac{c\, c_1 \sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{c^n + c_1^n}}.$$

Analog ergibt sich aus Satz IV:

Satz VIII: *Zu den Bedingungen für B aus Satz* VII *möge noch hinzukommen, daß B dem Bereich $|w|<1$ angehört. Es ist also $0<c\leqq 1$, $0<c_1\leqq 1$. Dann gilt*

$$\varrho \leqq \alpha_1 = \frac{c c_1 \sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{(1+c^n c_1^n)(c^n+c_1^n)}}. \tag{18}$$

Das Gleichheitszeichen steht nur bei der Abbildung $z=\varphi_1^*(w)$[22]), die durch $\frac{z^n}{\alpha_1^{2n}}+\frac{1}{z^n}=(e^{-i\beta_0}w)^n+\frac{1}{(e^{-i\beta_0}w)^n}+b$ (b reell) gegeben ist, wobei $\frac{2}{\alpha_1^n}=c^n+\frac{1}{c^n}+b$ und $-\frac{2}{\alpha_1^n}=-c_1^n-\frac{1}{c_1^n}+b$ gilt.

Bei $c_1=1$ wird $\alpha_1=\frac{c\sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{(1+c^n)^2}}$. Diese Beziehung liefert für $n=1$ und einfach zusammenhängende Bereiche folgenden von Bieberbach[23]) bewiesenen Satz:

Hat der Rand von B von o eine Minimalentfernung $d\leqq c$, so gilt $\varrho\leqq\frac{4c}{(1+c)^2}$, das Gleichheitszeichen steht nur, wenn $z(w)$ durch $\frac{e^{i\alpha}z}{\alpha_1^2}+\frac{1}{e^{i\alpha}z}=e^{i\beta}w+\frac{1}{e^{i\beta}w}+2-\frac{2}{\alpha_1}$ gegeben ist.

Mit Hilfe von Satz VII können wir leicht einen Spezialfall eines von Pólya[24]) gestellten Variationsproblems unter Erweiterung der Konkurrenzfunktionen lösen.

Wir betrachten endlich vielfach zusammenhängende, ∞ als inneren Punkt enthaltende Bereiche B, deren eine Randkomponente C die Eigenschaft hat, daß die Halbstrahlen durch o des Arguments $\varphi=\frac{\pi}{n}\lambda$ $(\lambda=0,\dots 2n-1)$ C treffen und für die Minimalentfernung von o der von o entferntesten Punkte von C auf $\varphi=\frac{\pi}{n}\cdot 2\varkappa$ $(\varkappa=0,\dots n-1)$ $m\geqq\delta$, auf $\varphi=\frac{\pi}{n}(2\varkappa+1)$ $(\varkappa=0,\dots n-1)$ $m_1\geqq\delta_1$ gilt. B werde durch $w=\psi(z)$ mit $\psi(z)=a_1z+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\cdots$ $(a_1=1)$ im Unendlichen schlicht auf das längs konzentrischen Kreisbögen geschlitzte Äußere eines Kreises $|w|=r$ abgebildet. Es werden B und C so gesucht, daß r ein Minimum wird. Das Minimum ist

$$r^*=\sqrt[n]{\frac{\delta^n+\delta_1^n}{4}} \tag{19}$$

und wird nur dann angenommen, wenn C gleich dem Kontinuum C^* ist, das durch geradlinige Verbindung der Punkte $z_{2\varkappa}=\delta e^{\frac{2\pi i}{n}\varkappa}$,

22) Von Drehungen abgesehen. 23) A. a. O. 5) a). 24) A. a. O. 7).

$z_{2\varkappa+1} = \delta_1 e^{\frac{\pi i}{n}(2\varkappa+1)}$ $(\varkappa = 0, \ldots n-1)$ mit 0 entsteht, und die übrigen Randstücke von B Schlitze sind, die bei der Abbildung des von C^* begrenzten einfach zusammenhängenden Bereiches auf $|w| > r^*$ durch $w = \psi^*(z)$ in Kreisbogenschlitze mit 0 als Mittelpunkt übergehen.[25])

Zum Beweise machen wir die Transformationen $w_1 = \frac{1}{z}$, $z_1 = \frac{1}{w}$ und setzen $\delta = \frac{1}{c}$, $\delta_1 = \frac{1}{c_1}$. Dann können wir Satz VII anwenden.

Zu den Sätzen über schlichte normierte Abbildungen von $\widehat{K_0}$ existieren entsprechende Sätze über schlichte normierte Abbildungen von $\widehat{K_r}$. Wir kennzeichnen die Sätze durch den Index r. Wir werden nur die extremalen Schlitzabbildungen von K_r angeben.

$w = {}_cE_r(z)$ soll K_r schlicht normiert so abbilden, daß r in r und $|z| = 1$ in einen Schlitz auf der reellen Achse, der auch ∞ enthalten kann, übergeht, wobei 1 einem Schlitzende c entspricht. Das andere Schlitzende sei c_1. Bei $c_1 = \infty$ setzen wir $c = d_r$ und ${}_cE_r(z) = E_r(z)$.

Im Satz III_r heißt die Extremalabbildung

$$w = {}_cE_r^n(z) = \sqrt[n]{{}_{c^n}E_{r^n}(z^n)} \quad \text{mit} \quad c^n \geqq d_{r^n}.$$

Im Satz IV_r ist die Extremalabbildung $w = {}_cE_{r,R}^n(z)$ durch

$$\sqrt[n]{R^n E_{\frac{r^n}{R^n}}\left(\frac{w^n}{R^n}\right)} = \sqrt[n]{{}_bE_{r^n}(z^n)}$$

(b reell, $b \geqq d_{r^n}$) mit $R^n E_{\frac{r^n}{R^n}}\left(\frac{c^n}{R^n}\right) = b$ gegeben.

Der Wortlaut und Beweis der Sätze ist nach dem Vorangehenden unmittelbar anzugeben. In entsprechender Weise können wir Sätze VII_r und VIII_r aufstellen.

Schlußbemerkungen.

Es soll noch dargelegt werden, wie sich mit unserer Methode einige Verzerrungssätze und Koeffizientenabschätzungen für schlichte normierte Abbildungen von K_0 herleiten lassen.

Satz IX: *$w = f(z)$ bilde K_0 schlicht normiert ab. $f\left(\varrho e^{\frac{i\pi}{n}2\varkappa}\right)$ möge das Argument $\frac{\pi}{n}2\varkappa$, $f\left(\varrho_1 e^{\frac{i\pi}{n}(2\varkappa+1)}\right)$ das Argument $\frac{\pi}{n}(2\varkappa+1)$ $(\varkappa = 0, \ldots n-1)$*

25) Pólya betrachtet nur einfach zusammenhängende Bereiche und fordert, daß C die Punkte $z_{2\varkappa}$ und $z_{2\varkappa+1}$ enthält oder umschließt.

haben (ϱ, ϱ_1 *reell,* < 1). *Dann kann für ein bestimmtes positiv reelles* $c \geqq \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ *gleichzeitig*

$$\left| f\left(\varrho\, c^{\frac{i\pi}{n}2\varkappa}\right)\right| \leqq {}_cE^n(\varrho) \qquad (\varkappa = 0, \ldots n-1)$$

$$\left| f\left(\varrho_1 e^{\frac{i\pi}{n}(2\varkappa+1)}\right)\right| \leqq \left|{}_cE^n\left(\varrho_1 e^{\frac{i\pi}{n}}\right)\right| \qquad (\varkappa = 0, \ldots n-1)$$

nur bei $f(z) = {}_cE^n(z)$ *gelten.*

Beweis: Wir schneiden K_0 längs der Radien des Arguments $\frac{\pi}{n}2\varkappa$ bzw. $\frac{\pi}{n}(2\varkappa+1)$ vom Betrage 1 bis ϱ bzw. ϱ_1 ein und bilden den so eingeschnittenen Einheitskreis durch $z_1 = g(z)$ mit $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ auf $|z_1| < r$ ab. Unsere Behauptung folgt dann durch Anwendung von Satz III auf die Abbildung $f[g^{-1}(z_1)]$ von $|z_1| < r$.

Nehmen wir noch $|f(z)| < R$ hinzu, so läßt sich ein entsprechender Satz mit Hilfe von Satz IV beweisen. Analog wie in IX erhält man folgendes:

$w = f(z)$ bilde K_0 schlicht normiert ab. In der w-Ebene sei ∞ auf keinem Halbstrahl durch 0 von 0 aus erreichbar, ohne den Bildrand $\mathfrak{S}$ zu treffen. $f\left(\varrho e^{\frac{\pi i}{n}2\varkappa}\right)$ habe das Argument $\frac{\pi}{n}2\varkappa$ $(\varkappa = 0, \ldots n-1)$. Dann gilt für mindestens ein $\varkappa$

$$\left| f\left(\varrho e^{\frac{\pi i}{n}2\varkappa}\right)\right| > \frac{\varrho}{\sqrt[n]{(1+\varrho^n)^2}}, \quad \text{oder es ist} \quad f(z) = E^n(z).$$

Ist die obige Bedingung für $\mathfrak{S}$ erfüllt, so gilt

$$|f(z)| > \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \quad \text{für } |z| < 1 \text{ oder } f(z) = \frac{e^{i\alpha}z}{(1+e^{i\beta}z)^2}.$$

Satz X: $w = f(z)$ *bilde* K_0 *schlicht normiert so ab, daß in der* w*-Ebene* ∞ *von* 0 *aus auf keinem Halbstrahl durch* 0 *erreichbar ist, ohne den Bildrand* $\mathfrak{S}$ *zu treffen. Die Entwicklung in* 0 *sei* $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{2n+1}z^{2n+1} + \cdots + a_{\nu n+1}z^{\nu n+1} + \cdots$ *mit reellen Koeffizienten. Der Konvergenzradius sei* r. *Dann gilt*

$$|a_{n+1}| \leqq \frac{2}{n} \tag{20}$$

$$a_{2n+1} \geqq \frac{n+1}{2}a_{n+1}^2 - \frac{1}{n}\cdot{}^{26}) \tag{21}$$

26) Die Fälle $n = 1$, $n = 2$ der Formel (21) sind für schlichte normierte Abbildungen von K_0, die ∞ nicht annehmen und deren Entwicklung in 0 reelle Koeffizienten hat, von W. Rogosinski: *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen*, Math. Zeitschr. 35 (1932), 115 (74), 121 (23 b) aus ganz anderer Quelle abgeleitet worden.

Beweis: Annahme: $|a_{n+1}| > \frac{2}{n}$. Wir können annehmen $a_{n+1} \leqq 0$, da $e^{\frac{-i\pi}{n}} f\left(e^{\frac{i\pi}{n}} z\right) = z - a_{n+1} z^{n+1} + \cdots$ ist, also $a_{n+1} = -\frac{2}{n} - c$ (c reell, $c > 0$). Für $\varrho < r$ hat $f\left(\varrho e^{\frac{i\pi}{n}\lambda}\right)$ das Argument $\frac{\pi}{n}\lambda$ ($\lambda = 0, \ldots 2n-1$). Da $E^n(z) = z - \frac{2}{n} z^{n+1} + \alpha_{2n+1} z^{2n+1} + \cdots$ ist, so wäre für hinreichend kleine ϱ: $\left|f\left(\varrho e^{\frac{i\pi}{n}2\varkappa}\right)\right| < E^n(\varrho)$ ($\varkappa = 0, \ldots n-1$) im Widerspruch zu oben. Also gilt (20).

Annahme: $a_{2n+1} = \frac{n+1}{2} a_{n+1}^2 - \frac{1}{n} - c_1$ (c_1 reell, $c_1 > 0$). Es gilt

$$_cE^n(z) = z + \frac{1}{n}\left(2 - \frac{1}{c^n}\right) z^{n+1} + \left[\frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}\left(2 - \frac{1}{c^n}\right)^2 - \frac{1}{n}\right] z^{2n+1} + z^{3n+1}(\ldots).$$

Da $|a_{n+1}| \leqq \frac{2}{n}$ ist, so können wir c mit $\sqrt[n]{\frac{1}{4}} \leqq c \leqq \infty$ so wählen, daß $\frac{1}{n}\left(2 - \frac{1}{c^n}\right) = a_{n+1}$ ist. Unter unserer Annahme wäre

$$\left|f\left(\varrho e^{\frac{\pi i}{n}\varkappa}\right)\right| < {}_cE^n(\varrho) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots n-1)$$

$$\left|f\left(\varrho e^{\frac{\pi i}{n}(2\varkappa+1)}\right)\right| < \left|{}_cE^n\left(\varrho e^{\frac{i\pi}{n}}\right)\right| \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots n-1)$$

für hinreichend kleine ϱ im Widerspruch zu Satz IX. Es gilt also (21).

Lebenslauf.

Am 15. Januar 1909 wurde ich als Sohn des Reichsbankobersekretärs Karl Rengel zu Berlin-Boxhagen geboren. Mit vollendetem 6. Lebensjahr wurde ich in die Vorschule der Hohenzollern-Oberrealschule in Berlin-Schöneberg aufgenommen. Ich habe die Hohenzollern-Oberrealschule ohne Unterbrechung bis zur Oberprima besucht und im März 1927 die Reifeprüfung mit Auszeichnung bestanden.

Vom Sommer-Semester 1927 bis zum Winter-Semester 1931/32 habe ich an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin Mathematik und Naturwissenschaften studiert. Im Februar 1932 habe ich in Berlin die Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen mit dem Prädikat „Mit Auszeichnung" bestanden.

Meine akademischen Lehrer waren die Professoren und Dozenten Bieberbach, Bodenstein, Dessoir, Feigl, Hammerstein, Hettner, H. Hopf, Johnsen, Köhler, Liebert, Marckwald, v. Mises, Nernst, Planck, Reichenbach, Schlenk, Erh. Schmidt, Schur, Spranger, Vierkandt, Wehnelt. Besondere Förderung verdanke ich den Herren Prof. Bieberbach, Dr. Feigl, Prof. H. Hopf und Prof. Erh. Schmidt.

Herrn Prof. Bieberbach möchte ich an dieser Stelle für seine Unterstützung und Beratung bei der Durchführung dieser Arbeit ergebenst danken.